ECOLE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE MARSEILLE

CONCOURS 1985

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

Les parties I *et* II *sont indépendantes*

I

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{2n}}$$

a. Étudier la convergence de I_n.

b. Montrer que pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$, on a les égalités :

$$I_n = \int_0^{1} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt$$

c. Montrer que pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n}\sum_{K=0}^{K=n-1} \frac{\sin^2 \omega_K}{t^2 - 2t\cos\omega_K + 1}$$

où $\omega_K = (2K+1)\dfrac{\pi}{2n}$

d. Montrer que :

$$\sum_{K=0}^{K=n-1} \sin(2K+1)\varphi = \frac{1-\cos 2n\varphi}{2\sin\varphi}$$

et en déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{2n}}$

e. En déduire la valeur exacte de :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{20}} = \int_0^{1} \frac{1+t^{18}}{1+t^{20}}\,dt$$

On donnera la valeur approchée de J à 10^{-7} près.

II

On pose $f(t) = \dfrac{1+t^{18}}{1+t^{20}}$

a. Montrer que si l'on utilise la subdivision régulière de $[0, 1]$ obtenue en divisant le segment $[0, 1]$ en dix parties égales, la valeur approchée de J obtenue par la méthode des trapèzes est :

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{i=9} f\left(\frac{i}{10}\right) + \frac{1}{20}\left[f(1) - f(0)\right]$$

Donner la valeur de $\bar{J}_1$ à 10^{-5} près. On fera un tableau des valeurs utiles de f.

b. Montrer que si l'on utilise la même subdivision et la méthode des tangentes aux points d'abscisses $\dfrac{2j+1}{20}$ la valeur approchée de J est donnée par :

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{10}\left(\sum_{j=0}^{j=9} f\left(\frac{2j+1}{20}\right)\right)$$

Donner la valeur de $\bar{J}_2$ à 10^{-5} près.

c. On admettra que $\bar{J}_3 = \dfrac{\bar{J}_1 + 2\bar{J}_2}{3}$ est la valeur approchée de J obtenue par la méthode de Simpson. Donner la valeur de $\bar{J}_3$ à 10^{-5} près.